数理解析研究所講究録
39巻 1968年 33-50

Schrödinger作用素のスペクトルについて

東大 教養　牛島照夫

§0. 序

ヒルベルト空間$L^2(R^n)$ $(n \geqq 3)$ で微分作用素：

$$L = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{i\partial x_j} + b_j(x)\right)^2 + q(x)$$

で与えられるSchrödinger 作用素を考える。ここで$b_j(x)$と$q(x)$は、実数値函数である。この作用素のスペクトル，特にその絶対連続部分について、Kurodaの理論（[1]，[2]）を適用して得られる結果を報告しよう。

§1. 仮定と結果

はじめに、$-\Delta$を、急激す函数族$\mathcal{S}$の上に制限した$-\Delta|_{\mathcal{S}}$は本質的に自己共役であり、その自己共役拡張H_0は定義域$D(H_0) = \mathcal{D}_{L^2}^2(R^n)$であり、そのスペクトルは絶対連続かつ正の実軸全体であることを注意しておく。

函数$b_j(x)$ $(j = 1, 2, \cdots n)$と

$q(x)$について次の仮定をおく。

(C.1) $L|_{\mathcal{D}}$は、本質的に自己共役であり、その自己共役拡張Hは、$D(H)=D(H_0)$をみたす。

(C.2) $a>\frac{n}{2}$

$$2n>p_1>n$$

$$2n>p_2>\max\left(2,\frac{n}{2}\right)$$

をみたす、a, p_1, p_2 に対して

$$(1+|x|)^a\, b_j(x)\in L^{p_1}\quad (1\leqq j\leqq n),$$

$$(1+|x|)^a\, q'(x)\in L^{p_2}.$$

ここで $q'(x)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial b_j(x)}{i\partial x_j}+b_j^2(x)\right)+q(x)$.

(C.3) $|x|\to\infty$で $b_j(x)=O(|x|^{-(a+1)-\varepsilon})$

$(\varepsilon>0,\ j=1,2,\cdots,n)$,

$n>p_2>\max\left(2,\frac{n}{2}\right)$ なるp_2に対して、

$(1+|x|)^a\, q'(x)\in L^{p_2}$.

条件(C.1), (C.2)のもとで次のことが結論できる。

(R.1) Hの絶対連続部分は、H_0とユニタリー同値。

(R.2) Hの絶対連続部分は、Kuroda([1])の意味で準固有函数展開をもつ。

さらに、(C.3)も仮定すると、

(R.3) Hの特異部分のスペクトルを$\sigma_s(H)$で表わすと、$\sigma_s(H)-\{0\}$は、高々可算個の有限多重度の固有値よりなる。

負の固有値は集積点をもたない。 正の固有値は、0以外を集積点としない。

§2. Kurodaの結果

可分なヒルベルト空間$\mathfrak{H}$における自己共役作用素H_j $(j=0,1)$を考える。実でない複素数zに対して、$R_j(z) \equiv (H_j - z)^{-1}$とおく。$H_j$のスペクトル、絶対連続部分のスペクトル、特異部分のスペクトルを、それぞれ$\sigma(H_j)$, $\sigma_{ac}(H_j)$, $\sigma_s(H_j)$と書く。$\mathfrak{H}$の有界線型作用素の全体を$\mathfrak{B}$で表わし、任意の線型作用素Tの定義域、値域を、それぞれ$D(T)$, $R(T)$とする。H_jに対して次の条件を考える。

(K.1) $D(H_1) = D(H_0) = \mathfrak{D}$. $D(V) \supset \mathfrak{D}$ なるVで、$H_1 = H_0 + V$ とかける。

(K.2) 稠密な$R(A)$をもつ、可逆な$A \in \mathfrak{B}$と、$D(B) \supset R(R_0(z)A)$ $(^\forall z,\ \mathrm{Im}\, z \neq 0)$ なるBに対して、$u \in D(B)$ならば、$Vu = ABu$.

(K.3) $\mathcal{S}(z) \equiv A^* \{ R_0(z) - R_0(\bar{z}) \} A \in \mathfrak{B}$ に対して、$\mathcal{S}(\lambda) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathcal{S}(\lambda + i\varepsilon)$ が、作用素ノルムで存在し、この収束はλにつき広義一様である。

(K.4) $Q(z) \equiv BR_0(z)A$ とおくと、$Q(z) \in \mathfrak{B}$ かつ $\mathrm{Im}\, z \neq 0$で完全連続作用素である。

(K.5) $Q(\lambda \pm i0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Q(\lambda \pm i\varepsilon)$ が作用素ノルムで存在し、$Q(z)$は、$\mathrm{Im}\, z \geqq 0$ および $\mathrm{Im}\, z \leqq 0$ で作用素ノルムで連続である。

(K.6) 実軸上の閉区間Iに対して、$I^{+} \equiv \{z ; \mathrm{Re}\, z \in I, \mathrm{Im}\, z \geqq 0\}$ とおく。同様にI^{-}を定義しておく。このとき $\left\{\frac{1}{2\pi i} \mathfrak{I}(\lambda)\right\}^{1/2}$ は区間Iで、又$Q(z)$は、$I^{+}(I^{-})$で、$\theta(>\frac{1}{2})$次 Hölder 連続(作用素ノルムで)である。

我々が使うKurodaの結果は次のように要約できる。

<u>定理 K.</u> (1)条件(K.1)〜(K.5)のもとで、

1° H_0のスペクトルは絶対連続、

2° $\sigma_{ac}(H_1) = \sigma(H_0)$, $\sigma_s(H_1)$は、測度0の閉集合、

3° 次の条件をみたすWave Operator $W_{\pm} \in \mathcal{B}$ が存在;

$$W_{\pm}^{*} W_{\pm} = 1, \quad W_{\pm} W_{\pm}^{*} = P_1, \quad H_1 W_{\pm} = W_{\pm} H_0$$

$$W_{\pm} = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0}$$

(1は恒等作用素、P_1はHの絶対連続部分への射影)

(2) さらに(K.6)を仮定すると、

4° $\sigma_s(H_1) \cap I$は、たかだか可算個の多重度有限の固有値よりなり、それらは、Iの内部には集積しない。

([1], [2])

§3. 摂動の分解と $(-\Delta-\lambda)^{-1}$ の積分核の評価

与えられた L の形から、$q'(x)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial b_j(x)}{i\partial x_j}+b_j(x)^2\right)+q(x)$

とおくと、

$$L=-\Delta-2i\sum_{j=1}^{n}b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+q'(x)$$

$$=-\Delta+\alpha(x)\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+\beta_0(x)\right)$$

となる。ここで

$$\alpha(x)\beta_0(x)=q'(x),\ \alpha(x)\beta_j(x)=-2ib_j(x)\quad(1\leq j\leq n)$$

である。さて、

$$(Af)(x)\equiv\alpha(x)\cdot f(x),$$

$$(B_0f)(x)\equiv\beta_0(x)f(x),\quad (B_jf)(x)\equiv\beta_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}f(x)\ (1\leq j\leq n),$$

$$B\equiv\sum_{j=0}^{n}B_j$$

により、形式的に $H=H_0+AB$ の形になる。今後、

$$\alpha(x)=(1+|x|)^{-a},\qquad a>\frac{n}{2}$$

と仮定すると、(K, 2) の A についての条件はみたされる。

一方、$L^2(R^n)$ における $(H_0-\lambda)^{-1}$ は、次のように積分表示される。

$$(H_0-\lambda)^{-1}f(x)=\int_{R^n}R_n(|x-y|,\lambda)f(y)dy$$

ここで、

$$R_n(r,\lambda)\equiv C_n\sqrt{\lambda}^{\frac{n}{2}-1}r^{1-\frac{n}{2}}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda}r)$$

$(\lambda\not\geq 0,\ \Im m\sqrt{\lambda}>0,\ C_n=i2^{-\frac{n}{2}-1}\pi^{1-\frac{n}{2}}$ で
$H^{(1)}_{\nu}(z)$ は ν 次第一種 Hankel 函数)

である。 R_n, $\frac{\partial}{\partial x_j}R_n$, $\frac{\partial}{\partial\lambda}R_n$, $\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial x_j}R_n$ の評価のためよくしられた次の公式を利用する。

(H.1) $H_\nu^{(1)}(z)=C_\nu z^{-\nu}+O(z^{-\nu+1})$,

for $\operatorname{Im} z\geqq 0$ $|z|\to 0$, $(C_\nu=-i\pi^{-1}2^{-\nu}\Gamma(\nu))$.

(H.2) $H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{i(z-(2\nu+1)\frac{\pi}{4})}+O(z^{-\frac{3}{2}})$,

for $\operatorname{Im} z\geqq 0$ $|z|\to\infty$.

(H.3) $\frac{d}{dz}z^{-\nu}H_\nu(z)=-z^{-\nu}H_{\nu+1}(z)$.

(H.4) $\frac{d}{dz}z^{\nu}H_\nu(z)=z^{\nu}H_{\nu-1}(z)$.

$\phi(z)\in C^\infty$ を, $\phi(z)=1$ $(|z|\leqq 1)$, $=0$ $(|z|\geqq 2)$ にとる。 $R_n^{(1)}(r,\lambda)\equiv\phi(\sqrt{\lambda}r)R_n(r,\lambda)$, $R_n^{(2)}(r,\lambda)\equiv R_n(r,\lambda)-R_n^{(1)}(r,\lambda)$ とおくと, (H, 1), (H, 2) から

$$R_n(r,\lambda)=R_n^{(1)}(r,\lambda)+R_n^{(2)}(r,\lambda)$$
$$=\frac{S_n^{(1)}(r,\lambda)}{r^{n-2}}+\frac{S_n^{(2)}(r,\lambda)}{r^{\frac{n-1}{2}}}.$$

ここで, $S_n^{(k)}(r,\lambda)$ は, r につき連続で,

$|S_n^{(1)}(r,\lambda)|\leqq \text{const}$, $S_n^{(1)}(r,\lambda)=0$ for $|\sqrt{\lambda}r|\geqq 2$

$|S_n^{(2)}(r,\lambda)|\leqq \text{Const}\,|\sqrt{\lambda}|^{\frac{n-3}{2}}$, $S_n^{(2)}(r,\lambda)=0$ for $|\sqrt{\lambda}r|\leqq 1$

である。 $R_n=C_n\sqrt{\lambda}^{\,n-2}(\sqrt{\lambda}r)^{1-\frac{n}{2}}H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda}r)$ として (H.3) を使うと, $r=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_j^2}$ として

$$\frac{\partial}{\partial x_j}R_n(r,\lambda)=-\frac{C_n}{C_{n+2}}\cdot x_j\cdot R_{n+2}(r,\lambda)$$
$$=\frac{S_{n,j}^{(1)}(x,\lambda)}{r^{n-1}}+\frac{S_{n,j}^{(2)}(x,\lambda)}{r^{\frac{n-1}{2}}}.$$

ここで、

$$\mathcal{S}^{(k)}_{n,j}(x,\lambda) \equiv -\frac{C_n}{C_{n+2}}\cdot\frac{x_j}{r}\cdot\mathcal{S}^{(k)}_{n+2} \quad (k=1,2,\ 1\leq j\leq n)$$

は、$\mathcal{S}^{(k)}_{n+2}$ と、同様の評価をみたす。次に $N>1$ として

$$\Pi^{+}_{N} \equiv \{z : N^{-1} \leq |z| \leq N,\quad \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$$

とおく。同様に、Π^{-}_{N} を定義する。$R_n = C_n r^{2-n}(\sqrt{\lambda}\, r)^{\frac{n}{2}-1}$ $\cdot H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda}\, r)$ として(H.4)を使うと、N だけによる定数 C_N が存在して、$\lambda \in \Pi^{\pm}_{N}$ なら

$$\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{S}^{(1)}_{n}(r,\lambda)\right| \leq C_N,\quad \left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{S}^{(2)}_{n}(r,\lambda)\right| \leq C_N r$$

であることがわかる。これから、$\lambda \in \Pi^{\pm}_{N}$ と $1\leq j\leq n$ について

$$\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{S}^{(1)}_{n,j}(x,\lambda)\right| \leq C'_N,\quad \left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\mathcal{S}^{(2)}_{n,j}(x,\lambda)\right| \leq C'_N r$$

である。

さて、$Q_j(z) \equiv B_j R_0(z) A$ とおくと $Q(z) = BR_0(z)A = \sum_{j=0}^{n} B_j R_0(z) A = \sum_{j=0}^{n} Q_j(z)$ である。$R_0(z)$ の積分表示から

$$(Q_j(z)f)(x) = \int_{R^n} Q_j(x,y;z) f(y)\,dy,$$

$$Q_0(x,y;z) = \beta_0(x) R_n(|x-y|, z)\alpha(y),$$

$$Q_j(x,y;z) = \beta_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} R_n(|x-y|, z)\alpha(y) \quad (1\leq j\leq n)$$

である。上述した R_n および $\frac{\partial}{\partial x_j}R_n$ の評価から、

$$Q^{(k)}_j(x,y;z) \equiv \frac{\beta_j(x)\mathcal{S}^{(k)}_{n,j}(x,y;z)\alpha(y)}{|x-y|^{\lambda_{j,k}}}$$

$(k=1,2,\quad 1\leq j\leq n,$

$$\mathcal{S}^{(k)}_{n,0} \equiv \mathcal{S}^{(k)}_{n},$$

$$\lambda_{0,1} = n-2,\quad \lambda_{j,1} = n-1 \quad (1\leq j\leq n),$$

$$\lambda_{j,2} = \frac{n-1}{2}, \quad (0 \le j \le n))$$

とおくと、$Q_j(x, y : z) = Q_j^{(1)}(x, y : z) + Q_j^{(2)}(x, y : z)$ である。

したがって、

$$(Q_j^{(k)}(z)f)(x) \equiv \int_{R^n} Q_j^{(k)}(x, y : z) f(y) dy$$

なる積分作用素について、(K.4), (K.5) を験せばよい。又、$A(z) \equiv A^* R_0(z) A$ について

$$A^{(k)}(x, y ; z) = \frac{\overline{\alpha(x)}\, S_n^{(k)}(|x-y|, z)\, \alpha(y)}{|x-y|^{\lambda_{0,k}}} \quad (k = 1, 2)$$

を核とする積分作用素について (K.3) をみたすことを示せば Kuroda の結果が使えることになる。

§4、積分作用素の完全連続性と、条件Kの験証、

§3 で定義した $A^{(k)}(z)$, $Q_j^{(k)}(z)$ の性質を調べるために、Sobolev 及び Kondrachov の結果から導かれる次の補題を用いる。

<u>補題 U.</u> $1 < p, q < \infty$, $n > \lambda > 0$ が与えられたとき

(1) $0 \le \frac{1}{\alpha} < 1 - \frac{1}{p}$, $0 \le \frac{1}{\beta} < \frac{1}{q}$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{\lambda}{n}$$

をみたす α, β が存在したとする ($\frac{1}{\infty} = 0$ とする)。

このとき

$a(x) \in L^{\alpha}(R^n)$, $b(x) \in L^{\beta}(R^n)$, $c(x, y)$ は

$R^{2n} - \{x = y\}$ 上の連続有界な函数

に対して積分作用素

$$(K_\lambda u)(x) \equiv \int_{R^n} \frac{b(x)C(x,y)a(y)}{|x-y|^\lambda} u(y)dy$$

は、$L_p(R^n)$ から $L_q(R^n)$ への有界作用素で

$$\|K_\lambda\|_{\mathcal{L}(L_p,L_q)} \leq C(p,q,\alpha,\beta)\|C\|_\infty \|a\|_\alpha \|b\|_\beta$$

をみたす。

(2) さらに

$$1-\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{n} \leq \frac{1}{\alpha'} < 1-\frac{1}{p}, \quad 0<\frac{1}{\alpha'}, \quad 0<\frac{1}{\beta'}$$

$$\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\beta'} < 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\lambda}{n}$$

をみたす α', β' が存在し、

$$a(x) \in L^{\alpha'}(R^n) \qquad b(x) \in L^{\beta'}(R^n)$$

もみたすならば、K_λ は、$L_p(R^n)$ から $L_q(R^n)$ への完全連続作用素である。

<u>証明</u>　次の二つの補題を用いる。

<u>補題 S (Sobolev, [4])</u>

$$P>1,\ Q>1,\ \frac{1}{P}+\frac{1}{Q}>1,\ \lambda=n\left(2-\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}\right)$$

に対して、$f \in L^P(R^n)$, $g \in L^Q(R^n)$ ならば

$$\left|\iint_{R^n} \frac{g(x)f(y)}{|x-y|^\lambda} dxdy\right| \leq C(P,Q)\|g\|_Q \|f\|_P.$$

<u>補題 K (Kondrachov, [5])</u>

D を R^n の有界領域、$C(x,y)$ を $D\times D-\{x=y\}$ 上の有界連続函数としたとき、

$$(U_\lambda f)(x) = \int_D \frac{C(x,y)}{|x-y|^\lambda} f(y)dy$$

とおく。 $P>1$ が与えられたとき

$$n>\lambda\geqq n\left(1-\frac{1}{P}\right)$$

なる λ について

$$\frac{1}{Q}>\frac{1}{Q^*}=\frac{1}{P}-1+\frac{\lambda}{n}$$

になる Q を定めると、U_λ は、$L^P(D)$ から $L^Q(D)$ への完全連続作用素である。

(1) の証、$\frac{1}{P}=\frac{1}{p}+\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{Q}=\frac{1}{q'}+\frac{1}{\beta},\ \left(\frac{1}{q'}=1-\frac{1}{q}\right)$

とおくと、$P,\ Q$ は、補題 S の条件をみたす。任意の $u\in L^p$ と $v\in L^q$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(v,\ K_\lambda u)\\
&=\left|\iint\frac{\overline{v(x)}b(x)c(x,y)a(y)u(y)}{|x-y|^\lambda}dxdy\right|\\
&\leqq\|C\|_\infty\left|\iint\frac{\overline{v(x)}b(x)a(y)u(y)}{|x-y|^\lambda}dxdy\right|\\
&\leqq C(P.Q)\,\|C\|_\infty\|\bar{v}b\|_Q\ \|au\|_P\\
&\leqq C(P.Q)\,\|C\|_\infty\|b\|_\beta\|a\|_\alpha\|v\|_{q'}\|u\|_p
\end{aligned}
$$

だから (1) は示された。

(2) の証、$D_N\equiv\{x\,|\,|x|\leqq N\}$ の定義函数を $\chi_N(x)$ とおき

$$(K_\lambda^{(N.M)}u)(x)\equiv\int_{R^n}\frac{\chi_M(x)b(x)C(x.y)a(y)\chi_N(y)}{|x-y|^\lambda}u(y)dy$$

と定める。$\frac{1}{P}=\frac{1}{p}+\frac{1}{\alpha'},\ \frac{1}{Q^*}=\frac{1}{P}-1+\frac{\lambda}{n},$

$\frac{1}{Q}=\frac{1}{q}-\frac{1}{\beta'}$ とおくと、P,Q は、補題 K の条件をみたすから、$K_\lambda^{(N.N)}$ は、$L^p(D_N)$ から $L^q(D_N)$ への完全連続作用素で

ある。積分核の形から$L^p(R^n)$から$L^q(R^n)$への完全連続作用素である。ところが(1)の評価から

$$\|K_\lambda - K_\lambda^{(N,N)}\| \leqq \|K_\lambda - K_\lambda^{(\infty,N)}\| + \|K_\lambda^{(\infty,N)} - K_\lambda^{(N,N)}\|$$

$$\leqq C(p,q,\alpha,\beta)\{\|(1-\chi_N)a\|_\alpha\|b\|_\beta + \|\chi_N a\|_\alpha\|(1-\chi_N)b\|_\beta\}$$

$$\to 0$$

したがって、K_λは完全連続である。(証明終り)

補題Ⅵで $p=q=2$ とおいて次の系を得る。

補題Ⅵの系　$n>\lambda>0$なるλが与えられたとき

(1) $\frac{1}{p}, \frac{1}{q} < \frac{1}{2}, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1-\frac{\lambda}{n}$

とみたすp、qが存在して、

$\alpha(x) \in L^p(R^n)$, $\beta(x) \in L^q(R^n)$　$\gamma(x,y)$は$R^{2n}-\{x=y\}$の有界連続函数

ならば、

$$(K_\lambda f)(x) = \int_{R^n} \frac{\beta(x)\gamma(x,y)\alpha(y)}{|x-y|^\lambda} f(y)dy$$

は、

$$\|K_\lambda\|_{\mathcal{B}(L^2(R^n))} \leqq C(p,q)\,\|\gamma\|_\infty \cdot \|\beta\|_q \cdot \|\alpha\|_p$$

をみたす有界作用素である。さらに

(2) $\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{n} \leqq \frac{1}{p'} < \frac{1}{2}, \ \frac{1}{p'}+\frac{1}{q'} < 1-\frac{\lambda}{n}$

なるp', q'に対して

$\alpha(x) \in L^{p'}(R^n)$, $\beta(x) \in L^{q'}(R^n)$

ならばK_λは、$L^2(R^n)$の完全連続作用素である。

さて $\alpha(x)=(1+|x|)^{-a}$ $a>\frac{n}{2}$ にとると、$\frac{1}{p}\leqq\frac{1}{2}$ なる p に対して、$\alpha\in L^p$ である。$q=q'$ にとることにして、上の系で $\beta(x)$ に対する条件を求めてみると、

$\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{n}>0$ ならば $\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{n}<\frac{1}{q}<\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{n}\leqq 0$ ならば $\frac{1}{q}<1-\frac{\lambda}{n}$

なる q に対して、$\beta(x)\in L^q(R^n)$ が言えれば、適当に p と p' を選んで補題Uの系を適用すれば、K_λ が $L^2(R^n)$ の完全連続作用素になることがわかる。したがって

$\lambda_1=n-1$ のとき $q_1>n$

$\lambda_2=n-2$ のとき $n=3$ なら $6>q_2>2$

$n>3$ なら $q_2>\frac{n}{2}$

$\lambda_3=\frac{n-1}{2}$ のとき $2n>q_3>2$

に、q_j を選んで $\beta\in L^{q_j}$ とできれば、K_{λ_j} は完全連続である。この結果を $Q_j^{(k)}(z)$ に適用すると、

$\beta_0(x)\in L^{q_2}\cap L^{q_3}$, $\beta_j(x)\in L^{q_1}\cap L^{q_3}$ $(1\leqq j\leqq n)$

ならば、$Q_j^{(k)}(z)$ は完全連続である。このことは、§1の条件(C. 2)を示している。他の条件(K.)が(C. 2)のもとで成立つことを見よう。

(K. 2)は、補題Sから

$\int\frac{\partial}{\partial x_j}R_n(|x-y|,z)a(y)f(y)dy\in L^p$ $(1\geqq\frac{1}{p}\geqq\frac{1}{2})$ が導けるから、これは局所可積分で、$(\frac{\partial}{\partial x_j}R_0(z)Af)(x)$ に一致する。

このことから$D(B)\supset R(R_0(z)A)$かつ積分作用素$Q(z)$が、$BR_0(z)A$と一致することがわかる。

積分核の形から、$Q(z)$は、$z=\lambda\pm i0$ $(\lambda>0)$ に対して自然に定義される。さらに$R_n(r,0)\equiv\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(n-2)2\pi^{\frac{n}{2}}}r^{2-n}$とおいて、$z=0$にも定義しておく。$\beta_j(x)$を$\chi_N(x)\beta_j(x)$、$\alpha(x)$を$\chi_N(x)\alpha(x)$におきかえた作用素を$Q^{(N)}(z)$とおくと、補題Uの証明と同じく作用素ノルムで$\lim_{N\to\infty}Q^{(N)}(z)=Q(z)$であり、又この収束は、実軸をこめた上又は下半平面内の有界集合をzが動くとき一様である。公式(H.1)より、$\mathrm{Im}\,z_1$, $\mathrm{Im}\,z_2\geqq 0$ (又は$\leqq 0$) で、$|z_1|,|z_2|,|r|\leqq N$ ならば、$|z_1-z_2|\to 0$ のとき一様に、

$$R_n(r,z_1)-R_n(r,z_2)=\frac{o(1)}{r^{n-2}}$$

である。このことから、$Q^{(N)}(z)$が、$\mathrm{Im}\,z\geqq 0$ (又は$\leqq 0$)で作用素ノルムで連続なことがしたがう。したがって、$Q(z)$もzにつき連続であり、(K.5)が成立つ。条件(K.3)は(K.5)と同様にしてわかる。

次に、(C.2), (C.3)のもとで、(K.6)が成立つことを見よう。原点を含まぬ実軸上の任意の閉区間をIにとる。まず$Q_j^{(1)}(z)$ $(0\leqq j\leqq n)$が、$I^{\pm}$でLipschitz連続なことは、$\frac{d}{dz}\mathcal{P}^{(1)}_{n,j}(x,z)$が$z\in\Pi_N^{\pm}$で、有界なことからしたがう。次に、$Q_j^{(2)}(z)$が、$\theta\,(>\frac{1}{2})$次、Hölder連続なことをみる

ために、$z_1, z_2 \in \Pi_N^{\pm}$ なら、

$$
\begin{aligned}
&|S_{n,j}^{(2)}(x,z_1) - S_{n,j}^{(2)}(x,z_2)| \\
&= \left| \int_{z_2}^{z_1} \frac{d}{dz} S_{n,j}^{(2)}(x,z)\, dz \right| \\
&\leq \text{const} \cdot |z_1 - z_2| \cdot r
\end{aligned}
$$

と評価されることを注意しよう。const は、Nだけによらない定数である。したがって、

$$\frac{|S_{n,j}^{(2)}(x,z_1) - S_{n,j}^{(2)}(x,z_2)|^{\theta}}{r^{\theta}} \leq \text{const}\ |z_1 - z_2|^{\theta}$$

である。$\theta = \frac{1}{2} + \varepsilon$, $\lambda_4 = \frac{n}{2} - 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$

とおくと、$Q_j^{(2)}(z_1) - Q_j^{(2)}(z_2)$ の積分核は、$z_1, z_2 \in \Pi_N^{\pm}$ のとき、

$$\text{const} \cdot |z_1 - z_2|^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \frac{\beta_j(x)\alpha(y)}{|x-y|^{\lambda_4}}$$

で評価される。これが、有界作用素を定義するのは、補題Lの系の(1)によれば、$\frac{1+\varepsilon}{n} < \frac{1}{g_4} < \frac{1}{2}$ なる g_4 に対して、$\beta_j \in L^{g_4}$ であればよい。任意に小さく $\varepsilon > 0$ をとれるから、結局、

$$n > g_4 > 2$$

であれば、$Q_j^{(2)}(z)$は、$z \in \Pi_N^{\pm}$ で $\theta\,(> \frac{1}{2})$ 次Hölder連続になる。条件(C. 2)と(C. 3)は、このように、$\beta_j(x)$がとれることを意味している。$\left\{\frac{1}{2\pi i} S(\lambda)\right\}^{\frac{1}{2}}$ については、Kuroda が[I]で $n=3$ のときに示した方法が、そのま

ま、$n>3$ にも使える。そこでの球面調和函数を n 次元のものにとればよい。

§5、幾つかの注意

1° (C.1)の充分条件として

(C.1′) b_j, $\frac{\partial}{\partial x_j} b_j$ が有界可測、g が有界可測 $(n \geqq 3)$

又は $g \in L_2^{loc}$ $(n=3)$ を得る。これから、任意 $\varepsilon>0$ と $f \in \mathcal{D}_{L^2}^2$ に対して

$$\|Vf\| \leqq C(\varepsilon)\|f\| + \varepsilon\|H_0 f\|$$

なる評価が、得られるからである。又この評価から、(R.3)の負の固有値は有限個になる。

2° (C.2)は、$b_j(x)=\sum_{k=1}^{J} b_{jk}(x)$, $b_{jk} \in L^{p_{jk}}$ $\quad 2n>p_{jk}>n$ であればよいことは、証明の仕方からあきらか。$g'(x)$ についても同様である。

3° (C.2)で $b_j(x)$, $g'(x)$ の $|x| \to \infty$ の挙動を O の形で書くと、

$$b_j(x), g'(x) = O\left(|x|^{-\frac{n+1}{2}-\varepsilon}\right) \qquad \varepsilon>0$$

となる。

4° 正の固有値の有限性については、Mizohata-Mochizuki の $n=3$ のときの結果([3])がある。

5° Ushijima は[6]で、類似の結果を得ているが、フー

リエ変換を用いて議論したので、そこでは

$$(\Delta+1)^{[\frac{n}{2}]+1}(1+|x|)\begin{Bmatrix} b_j(x) \\ q(x) \end{Bmatrix} \in L^2 \cap L^1$$

のような高い正則性の仮定が必要であった。

6° Kuroda〔7〕では、$b_j(x)\equiv 0$ の場合の結果が、$n=1, 2$ の場合も含めて詳細に論じられている。$b_j(x)\equiv 0$ にかぎれば、本稿の結果は、彼のものに含まれている。

私信で、注意 6° を知らせて下さり、又多くの有益な助言を寄せていただいた、黒田成俊博士に、深く感謝する。

文献

〔1〕 Kuroda, S. T. 散乱の定常論と固有函数展開 I, II, 数学, vol 18, 74~85, 137~144 (1966).

〔2〕 Kuroda, S. T. An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectra and scattering theory, J. Analyse Math. vol 20, 57~117 (1967)

〔3〕 Mizohata, S., Mochizuki, K., On the point spectrum of the Schrödinger operator, Proc. J. Acad. vol 39, 661~666 (1963).

〔4〕 Sobolev, S. L. On a theorem of functional analysis (in Russian), Mat. Sbornik, vol 4 (46) 471〜497 (1938).

[5] Sobolev, S.L. Applications of functional analysis in mathematical physics, A.M.S. Translation of Math. Mono. vol 7, (1963).

[6] Ushijima, T. On the spectrum of some Hamiltonian operator, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo vol 16, 127〜133 (1966).

[7] Kuroda, S.T. Construction of eigenfunction expansions by the perturbation method and its application to n-dimensional Schrödinger operators, MRC Technical Summary Report #744, Univ. of Wisconsin, (1967).

なお連続スペクトルの摂動に関する基本的な結果は、

Kato, T. Perturbation theory for linear operator, Springer (1966).

の Chapt. X に要約されてある。